1 Introduction de la fonction exponentielle

1) Une certaine « équation différentielle » que l'on retrouve souvent :

Remarque : une équation différentielle est une équation, dont l'inconnue est une fonction f et qui relie la fonction f et sa dérivée f' et/ou ses dérivées d'ordre supérieur. Exemples :

- $f' = 2f$
- $f'' = k\sin(f)$ (où $k \in \mathbb{R}$)
- $f'' = kf$
- $f'' - 3f' + 2f = 0$

2) Pression atmosphérique

En 1648, Pascal met en évidence, par une expérience au Puy de Dôme, la notion de pression atmosphérique. Des travaux ultérieurs ont montré que la pression atmosphérique variait avec l'altitude ; plus précisément, la pression décroît avec l'altitude selon la loi : $p'(h) = -\frac{g}{k}p(h)$ où $p(h)$ est la pression à l'altitude h, g est l'accélération de la pesanteur et k est une constante. On obtient ainsi une équation différentielle du type : $\boxed{p' = Kp}$

3) Radioactivité

En radioactivité, on met expérimentalement en évidence que le nombre d'atomes qui se désintègrent en un temps donné est en moyenne proportionnel au nombre de ces atomes. Soit $N(t)$ le nombre d'atomes à un instant t. On a : $\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t) = -\lambda N(t)\Delta t$, qu'on peut aussi écrire : $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$.($\lambda$ est la constante radioactive)
En faisant tendre Δt vers 0, on obtient : $\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$ qui s'écrit aussi $\boxed{N' = KN}$ (avec $K = -\lambda$).

4) Fonction transformant une somme en produit

Au XVIe siècle, Neper (écossais) cherche des fonctions qui transformeraient les produits en sommes, ce qui permettrait de simplifier les calculs astronomiques. Les réciproques de ces fonctions transforment ainsi les sommes en produits.
Existe-t-il de telles fonctions, raisonnables (c'est-à-dire dérivables sur $\mathbb{R}$), transformant des sommes en produits ?
On connaît déjà des exemples sur $\mathbb{Z}$: Soit a un réel non nul et soit f la fonction définie sur $\mathbb{Z}$ par : $f(n) = a^n$.
Alors : Pour tous p et q dans $\mathbb{Z}$, $f(p+q) = a^{p+q} = a^p \times a^q = f(p) \times f(q)$.
Une autre fonction qui convient est la fonction nulle, mais elle n'est pas très intéressante !
Peut-on prolonger une telle fonction à $\mathbb{R}$?

2 La fonction exponentielle

2.1 Théorème (admis)

Il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.

2.2 Propriété fondamentale

$$f(x) \times f(-x) = 1 \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } f(0) = 1.$$

Démonstration :
On pose $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$. Montrons que $\varphi'(x) = 0$ pour tout x donc $\varphi(x)$ sera une constante pour tout x.
$\varphi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x)$
$\varphi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$
Or $f'(x) = f(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$ donc en remplaçant, on obtient :
$\varphi'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$ pour tout x. Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$.
Avec $x = 0$, on a : $\varphi(0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1.$ donc $\varphi(x) = 1$ pour tout x et $f(x) \times f(-x) = 1$ pour tout x.

Conséquences :

1. $f(x) = 0$ est impossible.
2. $f(x) > 0$ pour tout x car f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$ (f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$).
3. Comme $f'(x) = f(x)$ et que $f(x) > 0$ on a $f'(x) > 0$ pour tout x donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.3 Théorème d'unicité

Une fonction f qui vérifie $f'(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 1$ est unique et s'appelle l'exponentielle.
On la note (provisoirement) : $exp : x \mapsto exp(x)$

Démonstration : Supposons qu'il existe deux fonctions f et g telles que $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$ et de même $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$. Montrons que $f(x) = g(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

On pose $h(x) = f(-x) \times g(x)$. h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -f'(-x) \times g(x) + f(-x) \times g'(x)$.
Or $g'(x) = g(x)$ et $f'(x) = f(x)$ d'où $f'(-x) = f(-x)$. En remplaçant on obtient :
$h'(x) = -f(-x) \times g(x) + f(-x) \times g(x) = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Donc $h(x) = k$ où k est une constante que l'on va calculer.
$h(0) = f(-0) \times g(0) = 1 \times 1 = 1$ donc $h(x) = 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
Donc $f(-x) \times g(x) = 1$ pour tout x ; Or $f(-x) \times f(x) = 1$ donc $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ donc $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ donc $g(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et par suite $f = g$ ce qui prouve l'unicité de la fonction.

3 Relations fonctionnelles

Pour tout réel x et y :

1. $exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$
2. Pour tous réels x_1, x_2, ..., x_n, $\exp(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \cdots \times \exp(x_n)$.
   Écriture symbolique : $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(x_i)$
3. $exp(x-y) = \dfrac{exp(x)}{exp(y)}$
4. $exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$
5. $exp(nx) = (exp(x))^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Conséquence de la relation 5 :

$exp(n) = (exp(1))^n$; on pose $exp(1) = \mathrm{e}$ donc $exp(n) = \mathrm{e}^n$.

Valeur approchée : $e \approx 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999 5$.

Pour la plupart des exercices, il suffit d'utiliser $\mathrm{e} \approx 2,7$ sou $\mathrm{e} \approx 2;72$.
Remarque : e est, comme π, un nombre transcendant, c'est-à-dire solution d'aucune équation polynomiale, donc en particulier non rationnel)

On pose par convention : $exp(x) = \mathrm{e}^x$ cas particulier : $exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

Réécriture des relations avec la nouvelle relation

Pour tout réel x et y :

1. $e^0 = 1$
2. $e^x > 0$
3. $\mathrm{e}^{(x+y)} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
4. $\mathrm{e}^{(x-y)} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
5. $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
6. $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

4 Étude de la fonction exponentielle $exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$

4.1 $exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$

1. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $exp'(x) = \mathrm{e}^x$
2. $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
variation de exp		$\nearrow$	

<u>Exercice :</u> Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et $f''(x) = \mathrm{e}^x$.
$f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $f'(0) = \mathrm{e}^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Donc f' change de signe en 0 donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$ et $f(0) = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variation de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

4.2 Dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Pour tout x de I si u est dérivable sur I alors la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$$

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+4}$ sur $\mathbb{R}$. ; $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 2x + 3$. $u'(x) = 2$; $f' = u'\mathrm{e}^u$ donc $\boxed{f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x+3}}$.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$. $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2$. $f' = u'\mathrm{e}^u$ avec $u'(x) = 2x$ donc $\boxed{f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}}$.

c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x+3}$ sur $\mathbb{R}$. $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -x + 3$. $f' = u'\mathrm{e}^u$ avec $u'(x) = -1$ donc $\boxed{f'(x) = -\mathrm{e}^{-x+3}}$.

<u>Exercice : Étude des variations de f</u> $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ donc $f'(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'(x)		$-$	‖	$-$	
variation de f		$\searrow$	‖	$\searrow$	

5 Équations et inéquations avec l'exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les conséquences sont les deux propriétés ci-dessous :
Propriété 1

$$e^a = e^b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b$$

Exemples :

1. On veut résoudre l'équation $e^{2x-1} = e$.

   $e^{2x-1} = e \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 1 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1$ donc $S = \{1\}$.

2. On veut résoudre l'équation $e^{-x+2} = 1$.

   $e^{-x+2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-x+2} = e^0 \quad \Longleftrightarrow \quad -x + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2$ donc $S = \{2\}$.

Propriété 2

$$e^a \leqslant e^b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \leqslant b$$

Exemples :

1. On veut résoudre l'inéquation $e^{x+3} \geqslant e$.

   $e^{x+3} \geqslant e \quad \Longleftrightarrow \quad x + 3 \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant -2$ donc $S = [-2\ ;\ +\infty[$.

2. On veut résoudre l'inéquation $e^x - 1 \leqslant 0$.

   $e^x - 1 \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x \leqslant e^0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leqslant 0$ donc $S =]-\infty\ ;\ 0]$.

Exercice :

Établir le tableau de signes de $f(x) = (e^x + 2)(1 - e^x)$.

6 Limites avec exponentielle

Limite n ° 1

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

Démonstration :

La démonstration se fait par comparaison de e^x avec x.

Pour cela, on pose $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ et on étudie cette fonction.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut : $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On étudie le signe de $f'(x)$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \iff x \geqslant 0$.
On obtient le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

On peut donc dire que : pour tout x, $f(x) \geqslant 1$ donc $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ on peut dire, par théorème de comparaison, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Limite n ° 2

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Démonstration :

La démonstration se fait avec un changement de variable : $x = -X$.

On remarque que lorsque x tend vers $-\infty$ alors X tend vers $+\infty$.
Par ailleurs on a : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-X} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^X}$. Donc :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^X} = 0$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$

Conséquence graphique : chapitre LIMITES

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ la droite d'équation $y = 0$ c'est à dire l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentant l'exponentielle au voisinage de $-\infty$.

page 6 page 6

Limite 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démonstration :

La démonstration se fait par comparaison de e^x avec $\dfrac{x^2}{2}$.

Pour cela, on pose $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$ et on étudie cette fonction sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Voir partie exercice.

Conséquences : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

A l'aide du changement de variable $x = -X$ on peut affirmer que :

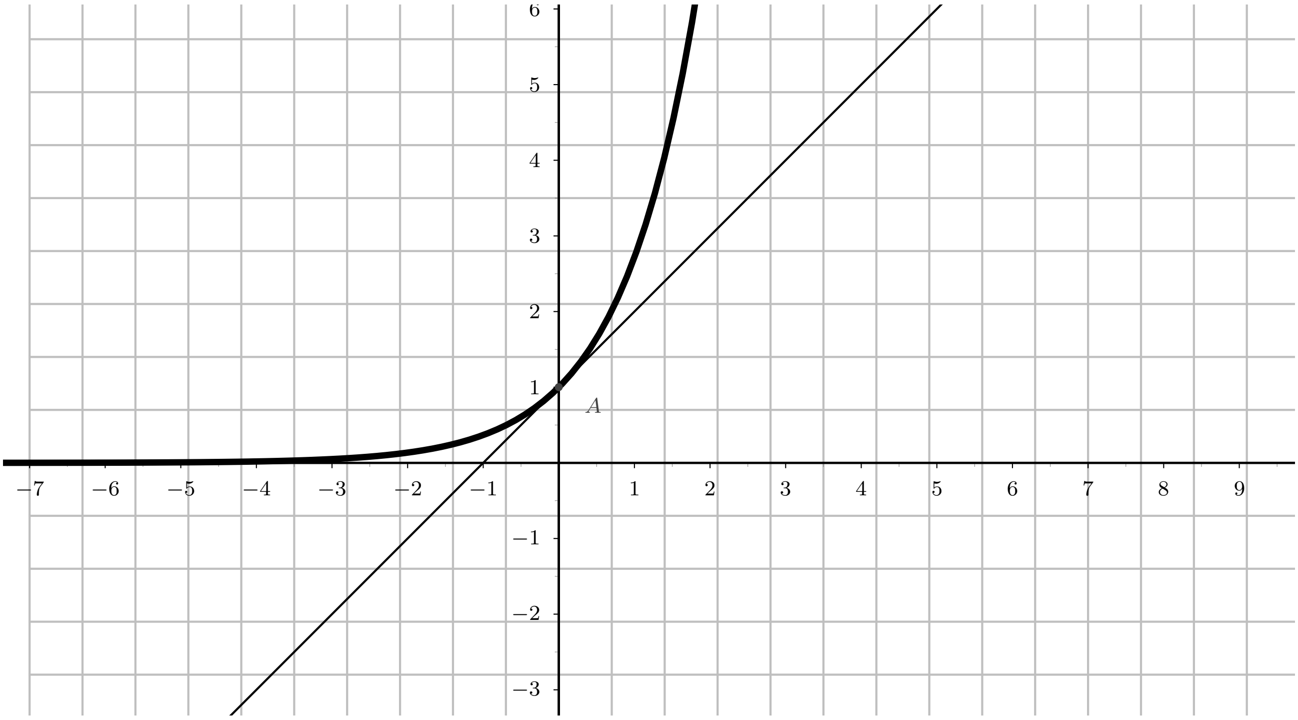
$$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$$

En effet, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x e^x = \lim_{X\to+\infty} -X e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{-X}{e^X} = 0$.

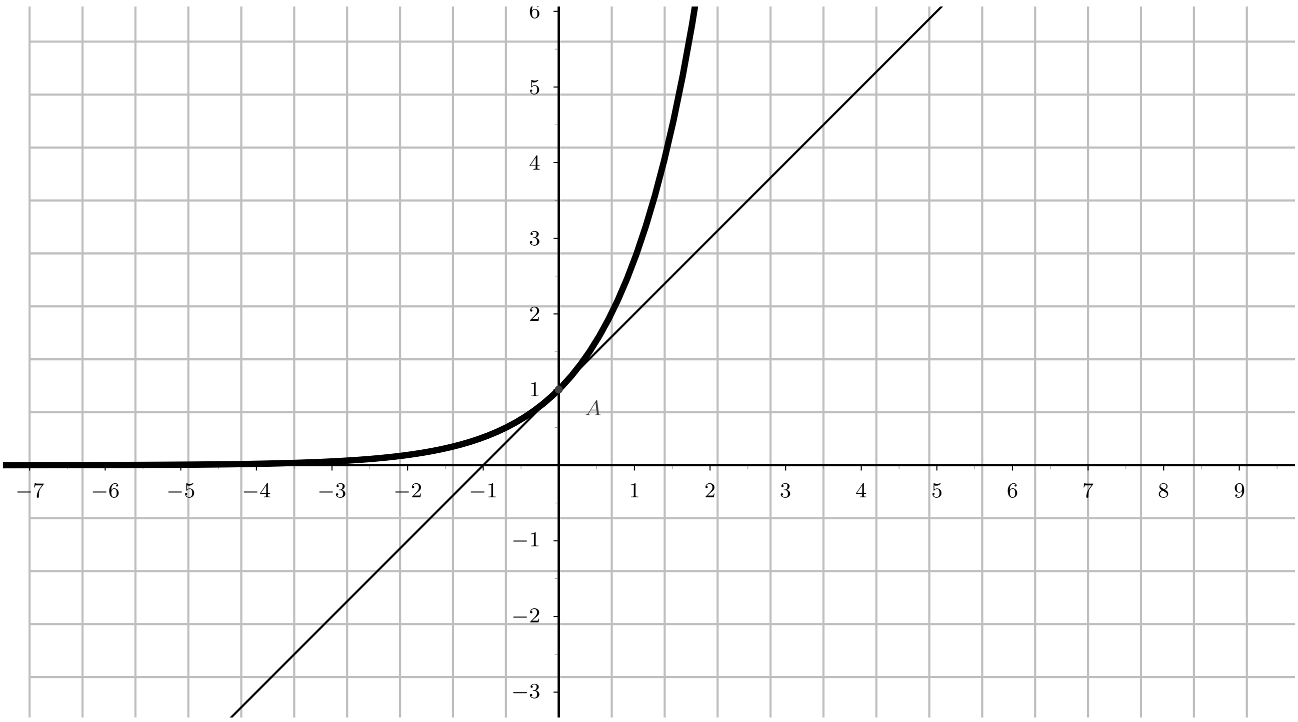
Plus généralement, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ où n est un entier naturel.

La croissance de la fonction exponentielle est redoutable. Tôt ou tard, elle dépasse la croissance des fonctions polynomiales.
Cette remarque est essentielle pour l'estimation de la quantité de calculs pour résoudre un problème. Autrement-dit, la durée d'exécution d'un programme de calculs. Si la quantité s'exprime par un polynôme, le temps de calcul sera raisonnable ; par contre, si elle croît de façon exponentielle, la capacité de calcul peut être vite dépassée.

Courbe de la fonction exp :



Courbe de la fonction exp :



7 Conséquences des variations de la fonction exponentielle

Avec les limites, on peut compléter le tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		$+\infty$
			$+\infty$
variation de exp		$\nearrow$	
	0		

La fonction $exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.

En effet, elle est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est dérivable. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout réel k strictement positif, l'équation $\mathrm{e}^x = k$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. Cette solution s'appelle le logarithme népérien de k et se note $\ln(k)$.

Propriété :

1. Si $k \leqslant 0$ l'équation $\mathrm{e}^x = k$ n'a pas de solution.
2. Si $k > 0$ l'équation $\mathrm{e}^x = k$ a une seule solution et on a :

$$\mathrm{e}^x = k \iff x = \ln(k)$$

Exemple : $\mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln(2)$

Exercices immédiats : Résoudre les équations :

1. $2\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff$

   Remarque : $(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})^2 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 2} = \mathrm{e}$ Par ailleurs $(\sqrt{\mathrm{e}})^2 = \mathrm{e}$ Donc $(\sqrt{\mathrm{e}})^2 = (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})^2$ Or si deux carrés de nombres de même signe sont égaux alors les deux nombres sont égaux.

   Par suite $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}}$.

2. $-\mathrm{e}^x + 3 = 0 \iff$
3. $2\mathrm{e}^x + 1 = 0 \iff$
4. $\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^x = 0 \iff$
5. $-4\mathrm{e}^{-x} + 10 = 0 \iff$
6. $(3\mathrm{e}^x - 2)(2\mathrm{e}^x + 6) = 0 \iff$
7. $(-2\mathrm{e}^x + 5)^2 = 0 \iff$

 page 9 page 9

8 Une autre limite à connaître :

Propriété : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h}=1$ ou $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$

Démonstration :
On identifie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ ave $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ avec $f(x)=\mathrm{e}^x$ et $a=0$.
La fonction exponentielle est dérivable en 0 et sa dérivée est elle même. Donc :
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=e^0=1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$.

9 Exercices :

EXERCICE N° 1 : On rappelle que exp est l'unique fonction non nulle dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On cherche une fonction f non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = \lambda \end{cases}$ $\quad \lambda \neq 0$.

Pour cela, on pose $g = \dfrac{1}{\lambda} f$.

1. Montrer qu'alors, $g' = g$ et que $g(0) = 1$.
2. En déduire l'expression de g puis celle de f.

EXERCICE N° 2 : On cherche une fonction f, non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\begin{cases} f' = kf \\ f(0) = 1 \end{cases}$ $\quad k \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \exp(kx)$ convient.
2. Comment montrerait-on l'unicité d'une telle fonction ?
3. En déduire une fonction f telle que $\begin{cases} f' = 2f \\ f(0) = 1 \end{cases}$
4. En déduire une fonction f telle que $\begin{cases} f' = 2f \\ f(0) = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N° 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} \qquad B = \mathrm{e}\mathrm{e}^x \qquad C = (\mathrm{e}^{-x})^2 \qquad D = \tfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2-x}} \qquad E = \tfrac{(\mathrm{e}^x)^3}{\mathrm{e}^{2x}}$$

EXERCICE N° 4 : Résoudre les équations suivantes : 1) $e^{-x} = -1$ $\quad$ 2) $e^{3x+1} = \sqrt{\mathrm{e}}$ $\quad$ 3) $e^{x^2+3x} = \mathrm{e}$

EXERCICE N° 5 : Résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^{2x+3} \leqslant e^{-7x+6}$ $\quad$ 2) $e^{x^2-2} \leqslant \frac{1}{e^x}$

EXERCICE N° 6 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \exp(3x+4)$
2. $x \mapsto x\exp(2x)$
3. $x \mapsto \sqrt{\exp(x)}$
4. $x \mapsto (\exp(x))^3$

EXERCICE N° 7 : Déterminer la tangente au point d'abscisse a et la position relative de cette tangente avec la courbe de f :

$a = 0$ et $f(x) = e^x$

$a = \frac{1}{2}$ et $f(x) = e^{-2x+1}$.

$a = 1$ et $f(x) = e^{x^2-1}$

EXERCICE N° 8 :

1. Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $\dfrac{e^{-2x}}{e^{3x}+2}$.
2. Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $(x+e^x)e^{-x}$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-3x} - e^{x^2}$.

EXERCICE N° 9 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. Montrer que pour $x \in$R, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f.
4. Prouver que l'équation $f(x) = -5$ admet exactement une solution sur $]-\infty; 1]$ puis sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée à 0,1 près de cette solution.

EXERCICE N° 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{2x}$. On sait que le point de coordonnées (0 ;-1) a ppartient à la courbe de f. De plus la tangente à C_f au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 2.

1. Déterminer $f'(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ de deux manières différentes.
3. Résoudre le système d'équation verifié par a et b. En déduire $f(x)$.

EXERCICE N° 11 : Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x} + x = 2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE N° 12 : On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 2x - 4.$$

On note C sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 4$ est asymptote à C.
   Étudier la position relative de C et de Δ.
3. Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f. Donner son tableau de variations.
4. Tracer la courbe C.

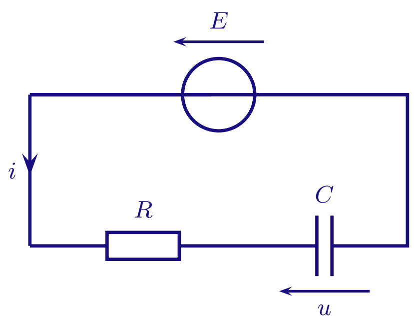
EXERCICE N° 13 : Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + x - 1.$$

1. Déterminer $f'(x)$.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 1$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f'.
   (c) Calculer $f'(1)$; en déduire le signe de $f'(x)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\ ;\ 2]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

EXERCICE N° 14 : On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela du circuit électrique ci-contre composé de :

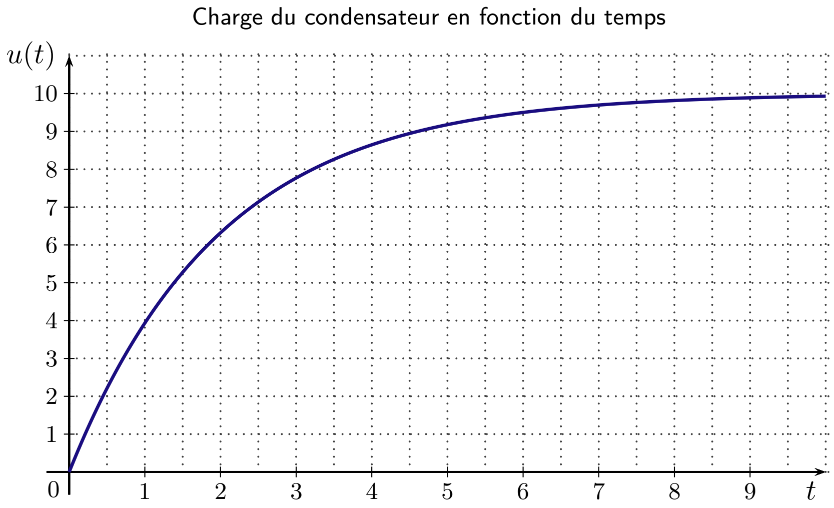
- une source de tension continue E de 10 V ;
- une résistance R de 4000 Ω ;
- un condensateur de capacité C de 500×10^{-6} F.



La tension $u(t)$ exprimée en volt aux bornes du condensateur est une fonction du temps t exprimé en seconde. La fonction u est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$u(t) = 10 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-0,5t}\right)$$

On donne ci-dessous, la représentation graphique de la fonction u.



1. Pour caractériser le temps de charge d'un condensateur, on utilise grandeur appelée constante de temps, notée τ, exprimée en seconde . On a
$$\tau = R \times C$$
Vérifier que $u(\tau) \approx 0,63 \times E$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction u. En donner une interprétation graphique.
3. On note u' la dérivée de la fonction u.
   (a) Montrer que $u'(t) = 5\mathrm{e}^{-0,5t}$.
   (b) Étudier le signe de $u'(t)$. En déduire le sens de variation de la fonction u.
4. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe représentative de la fonction u au point d'abscisse 0.
5. Pratiquement, un condensateur est considéré comme totalement chargé au bout d'une durée T telle que $u(T) = 0,99 \times E$.
Déterminer le temps de charge T arrondi au dixième de seconde près.